Fehlerrechnung

Eine Museumsbesucherin fragt einen Aufseher nach dem Alter eines Saurierskeletts. “180 Millionen Jahre und 34 Tage”. “Warum 34 Tage?” “Als ich hier anfing, war es 180 Millionen Jahre alt, das war vor 34 Tagen.” Wenn Sie den Witz lustig finden, verstehen Sie bereits, worum es in der Fehlerrechnung geht.

1 Messfehler

In der Mathematik nimmt man eine Zahl gewöhnlich als exakt an, so bedeutet z.B. 30 exakt $30.\bar{0}$.... Demgegenüber ist in der Physik der Zahlenwert jeder gemessenen Grösse mit einem Messfehler behaftet und zwar auch dann, wenn er mit dem besten verfügbaren Messinstrument bestimmt wurde. Dieser Messfehler (eigentlich Messungenauigkeit) kann zwar sehr klein, aber nie null sein. Deshalb ist eine physikalische Messung nur dann sinnvoll, wenn auch eine Angabe des Messfehlers gemacht wird, z.B. $s = 1.000\,\mathrm{m} \pm 0.001\,\mathrm{m}$. Diese Angabe bedeutet, dass der ”wahre“ Wert der gemessenen Länge zwischen 0.999 m und 1.001 m liegt. Wo dieser ”wahre“ Wert innerhalb des Fehlerintervalls wirklich liegt, wissen wir natürlich nicht. Das Fehlerintervall kann aber mithilfe eines besseren Messgeräts verkleinert werden. Dieser Unsicherheitsbereich kann aber nie unendlich klein (= 0) werden.

2 Fehlerarten

Man unterscheidet verschiedene Arten von Fehlern:

Grobe Fehler Ein grober Fehler liegt z.B. vor, wenn man einen Messwert falsch abliest. Grobe Fehler können durch sorgfältiges Arbeiten vermieden werden.

Systematische Fehler Systematische Fehler treten aufgrund von fehlerhaften Apparaturen oder Methoden auf, z.B. Längenmessung mit einem falsch geeichten Massstab. Systematische Fehler verfälschen die Messwerte immer in die gleiche Richtung und können deshalb auch durch wiederholte Messungen nicht eliminiert werden. Durch Anwendung verschiedener Messmethoden kann man versuchen, systematische Fehler zu erkennen, um sie darauf zu beseitigen.

Zufällige Fehler Jede Messmethode liefert nur Messwerte mit einer bestimmten Genauigkeit. Auch mit beliebig grossem Aufwand ist es nicht möglich, eine absolut präzise Messung durchzuführen. Elektronische Messinstrumente „rauschen“ (d.h. der angezeigte Messwert variiert um einen bestimmten Wert) beispielsweise, weil die Elektronen Wärmebewegungen durchführen. Da die zufälligen Fehler einen Messwert aber nicht in eine bestimmte Richtung verfälschen, kann man ihren Einfluss durch Wiederholung der Messung und Mittelwertbildung verringern.

3 Absolute und relative Fehler

Jedes Messergebnis ist in seinem Zahlenwert in gewisser Weise unsicher. Die eventuell eingetretene Abweichung wird mit einem „Vertrauensbereich“ in der Umgebung des Messergebnisses beschrieben. Im allgemeinen liegt der Vertrauensbereich symmetrisch zum ermittelten Messwert. Der „Vertrauensbereich“ definiert einen Wertebereich, in dem der wahre Wert der gemessen Grösse mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit liegen wird (z.B. mit 95%).

Der **absolute Fehler** eines Messwertes a ist Δa, wenn a mit Sicherheit im Intervall $[a - \Delta a, a + \Delta a]$ liegt. Man gibt dann das Resultat der Messung in der Form $a \pm \Delta a$ an, z.B. $N_A = (6.022 \pm 0.014) \cdot 10^{23}\,\mathrm{mol}^{-1}$ (Zehnerpotenz und Einheit ausklammern).

Der **relative Fehler** eines Messwertes a ist das Verhältnis aus dem absoluten Fehler und dem Messwert selber:

$$r_A = \frac{\Delta a}{a}.$$

Der relative Fehler wird häufig in Prozent angegeben, z.B. $N_A = 6.022 \cdot 10^{23}\,\mathrm{mol}^{-1} \pm 0.2\%$.

Runden Die Angabe des Messwertes und des Messfehlers müssen einer inneren Logik genügen. Da der wahre Wert innerhalb des gesamten Intervalles liegen kann, ist selbstverständlich eine höhere Genauigkeit bei der Angabe des Messwertes sinnlos. Geben Sie deshalb niemals ein Resultat von 23.343 g an, wenn Sie nur auf 0.1 g genau messen können. Der korrekte Wert lautet (23.3 ± 0.1) g

- Absolute Fehler werden mit einer, max. zwei wesentlichen Ziffern angegeben.
- Die Ergebniszahl und die Messunsicherheit werden an der gleichen Stelle gerundet.
- Die Messunsicherheit wird immer aufgerundet.

Folgende Beispiele sind also falsch: 3.468 ± 0.15 bzw. 5 ± 0.281. Richtig ist: 3.47 ± 0.15 bzw. 5.0 ± 0.3.

Ist keine Fehlerschranke notiert, nimmt man an, dass der Messwert gerundet ist und der Fehler etwa eine halbe Einheit der letzten Stelle beträgt. Beispiel: 5.038 kg heisst (5.038 ± 0.0005) kg. Es spielt also eine Rolle, ob man einen Messwert als 1.5 oder als 1.500 angibt!

Beispiel: Bestimmung der absoluten Fehlerschranken

- Längenmessung mit einem Massstab mit Zentimeter-Einteilung: Im Protokoll notieren Sie die Auflösung des Massstabes (1 cm). Die Ablesung ist aber mit Sicherheit auf 0.5 cm genau, d.h. $\Delta l = 0.5\,\mathrm{cm}$.
- Längenmessung mit einer Schublehre, Auflösung 0.05 mm: Unsicherheiten beim Ablesen sollten berücksichtigt werden, deshalb $\Delta l = 0.1\,\mathrm{mm}$.
- Zeitmessung mit einer Handstoppuhr, Auflösung 0.01 s: Die menschliche Reaktionszeit beträgt etwa 0.1 s, also auch der absolute Fehler. Lassen Sie sich durch mehrstellige Digitalanzeigen nicht täuschen! Die Genauigkeit kann allerdings durch mehrmaliges Stoppen des gleichen Vorgangs verbessert werden.

4 Fehlerrechnung

Gemessene physikalische Grössen werden oft in mathematischen Formeln verwendet, wobei sich die Fehler dieser Grössen aufs Resultat übertragen. Wir wollen uns in diesem Abschnitt mit der Berechnung dieser sog. **Fehlerfortpflanzung** beschäftigen.

4.1 Faustregel

Das Resultat einer Rechnung sollte etwa so viele wesentliche Ziffern aufweisen wie die ungenauste vorkommende Grösse. Beispiel: 28.3 / 5.7304 = 4.94. Es gibt aber Ausnahmen von dieser Regel, z.B. 18.9 - 18.7 = 0.2 und nicht 0.200! Die Faustregel liefert einen groben Anhaltspunkt über die Genauigkeit des Resultates. Für genauere Fehlerabschätzungen ist sie aber unbrauchbar.

4.2 Intervallarithmetik

Für komplizierte Ausdrücke, bei denen Sie keine Fehlerformel kennen oder diese zu kompliziert ist, gehen Sie wie folgt vor: Vergrössern oder verkleinern Sie jede Ausgangsgrösse so, dass das Resultat möglichst gross wird. Der Unterschied zum Resultat, das ohne Berücksichtigung der Fehler berechnet wird, wird dann als absoluter Fehler benutzt.

Beispiel Ein Quader hat Grundfläche $A = (23.52 \pm 0.11)\,\mathrm{cm}^2$, Masse $m = (1.77 \pm 0.12)\,\mathrm{kg}$ und Dichte $\rho = (8732 \pm 13)\,\mathrm{kg/m^3}$. Wie gross ist seine Höhe h? Wir rechnen zuerst so, als ob es keine Fehler gäbe. Dann suchen wir das grösste, mit den Fehlerschranken verträgliche Resultat. Die Differenz nehmen wir als Fehlerschranke des Resultats. Erst am Schluss wird gerundet.

$$h = \frac{m}{\rho \cdot A} = \frac{1.77\,\mathrm{kg}}{8732\,\mathrm{kg/m^3} \cdot 23.52 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{cm^2}} = 8.61831 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}$$

Fehlerschranken addiert oder subtrahiert, damit das Resultat möglichst gross wird:

$$h_{max} = \frac{(1.77 + 0.12)\,\mathrm{kg}}{(8732 - 13)\,\mathrm{kg/m^3} \cdot (23.52 - 0.11) \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m^2}} = 9.2596 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}$$

$$h_{min} = \frac{(1.77 - 0.12)\,\mathrm{kg}}{(8732 + 13)\,\mathrm{kg/m^3} \cdot (23.52 + 0.11) \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m^2}} = 7.98473 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}$$

$$\Delta h = h_{max} - h = 9.2596 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m} - 8.61831 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m} = 0.64129 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}$$

$$\Delta h' = h - h_{min} = 8.61831 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m} - 7.98473 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m} = 0.6336 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}$$

$$h = 8.61831 \pm 0.65 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m} = \underline{\underline{(8.62 \pm 0.65)\,\mathrm{cm}}}$$

4.3 Fehlerfortpflanzung

Für „kleine“ relative Fehler gelten folgende Regeln für die Fehlerfortpflanzung (vgl. FoTa):

- Addition und Subtraktion: absolute Fehler werden addiert;
- Multiplikation und Division: relative Fehler werden addiert;
- Potenzen: relativer Fehler wird mit dem Exponenten multipliziert;

Beispiel Die Geschwindigkeit eines Fahrzeuges wird bestimmt, indem die für eine bestimmte Strecke benötigte Zeit gemessen wird. Die Messwerte sind also $t \pm \Delta t$ und $s \pm \Delta s$. Die Geschwindigkeit berechnet sich nach der Formel $v = s/t$. Da die Geschwindigkeit ein Quotient ist, müssen die relativen Fehler von Strecke und Zeit addiert werden: $r_v = r_s + r_t = \Delta s/s + \Delta t/t$. Der absolute Fehler der Geschwindigkeit ist schliesslich $\Delta v = v \cdot r_v = v \cdot (\Delta s/s + \Delta t/t)$.

4.4 Ausblick

Mit Hilfe der Differentialrechnung können wir den exakten Fehler eines komplizierten Endresultats berechnen.

5 Diagramme mit Fehlerbalken

In graphischen Darstellungen werden die Messwerte nicht einfach als Punkte, sondern zusätzlich die Fehler wie im abgebildeten Beispiel (Abbildung 1) in Form von Balken (nach oben, unten, links und rechts) eingezeichnet. Die Intervalle, in denen die Messwerte liegen, werden so anschaulich dargestellt.

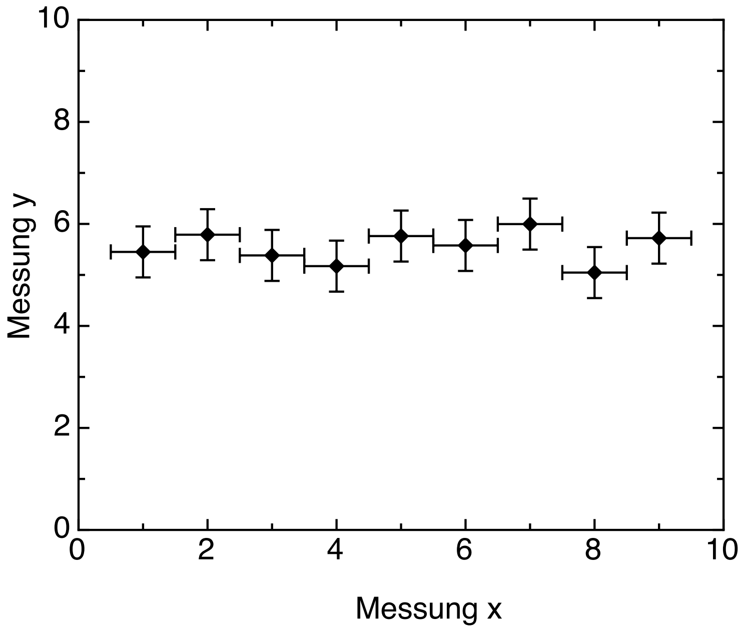

Abbildung 1: Bei grafischen Darstellungen von Messwerten sind in der Regel die Messwerte auf beiden Koordinatenachsen mit Fehlern behaftet. Für jeden Messpunkt i muss die abgeschätzte obere Fehlergrenze sowohl für x_i als auch für y_i bestimmt werden. Die so ermittelten Fehler x_i und y_i werden in Form eines Fehlerbalkens an dem Messpunkt (x_i, y_i) eingetragen.